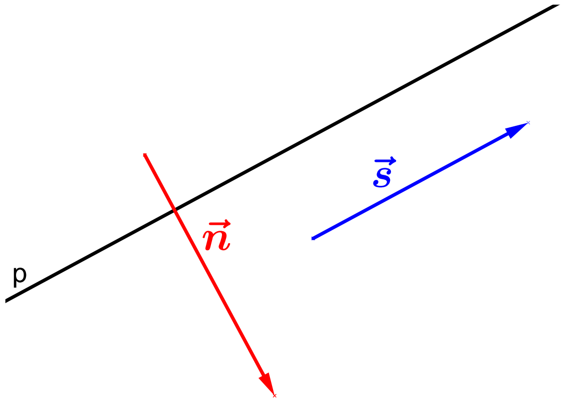
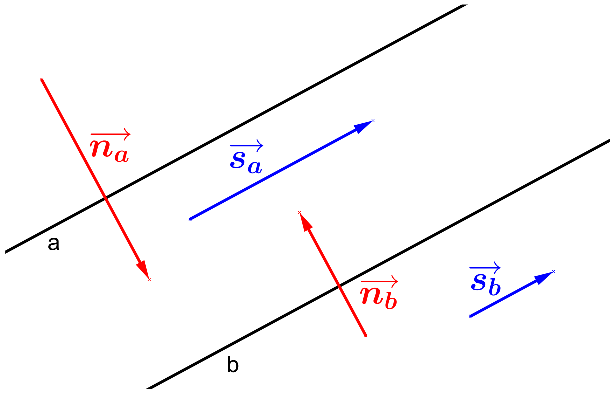
Parametrická rovnica priamky

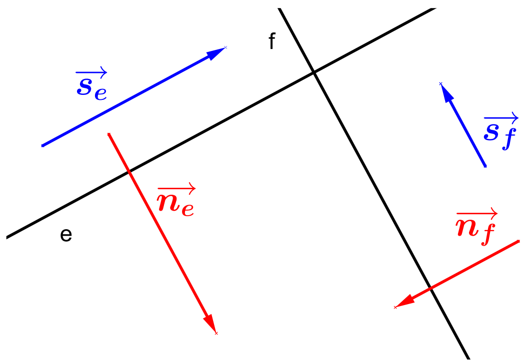
D. ***Smerovým vektorom priamky*** je ľubovoľný nenulový vektor, ktorý je rovnobežný s priamkou (je ich nekonečne veľa – sú navzájom rovnobežné ⇒ smer môžu mať dvojaký; líšia sa iba vo veľkosti) – $\vec{s}\ (s_1;\ s_2)$.

D. ***Normálovým vektorom priamky*** je ľubovoľný nenulový vektor, ktorý je kolmý na priamku (takisto je ich nekonečne veľa) – $\vec{n}\ (n_1;\ n_2)$.



Na obrázkoch vidíme, aký je vzťah medzi smerovými a normálovými vektormi rovnobežných a kolmých priamok





V.

$$a \parallel b \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{s_a} \parallel \overrightarrow{s_b} \\ \overrightarrow{n_a} \parallel \overrightarrow{n_b} \\ \\ \overrightarrow{s_a} \perp \overrightarrow{n_b} \\ \overrightarrow{n_a} \perp \overrightarrow{s_b} \end{cases} \qquad e \perp f \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{s_e} \perp \overrightarrow{s_f} \\ \overrightarrow{n_e} \perp \overrightarrow{n_f} \\ \\ \overrightarrow{s_e} \parallel \overrightarrow{n_f} \\ \overrightarrow{n_e} \parallel \overrightarrow{s_f} \end{cases}$$

Z klasickej euklidovskej geometrie vieme, že priamku môžeme určiť rôznymi spôsobmi – podľa axiómy dva body jednoznačne určia jednu priamku. Ďalšie možnosti sú odvodené z tejto axiómy:

- bod a rovnobežná priamka
- bod a kolmá priamka

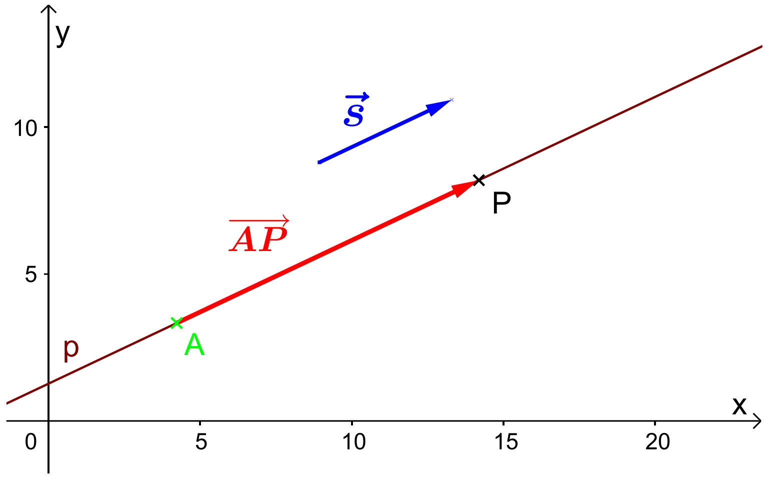
V analytickej geometrii rovnice priamok sú určené pomocou vektora priamky (smerového alebo normálového) a bodom tej priamky (niekedy namiesto vektora je daný ďalší bod tej priamky – pomocou tých bodov dokážeme určiť smerový vektor priamky).

Aby sme mohli napísať parametrickú rovnicu priamky potrebujeme poznať smerový vektor priamky a bod tej priamky.

Daná je priamka p smerovým vektorom $\overrightarrow{s_p}$ a bodom A:

$\overrightarrow{s_p}\ (s_1;\ s_2)$, $A(x_0;\ y_0)$

Umiestnime priamku do súradnicovej sústavy. Vyznačme na priamke ďalší, všeobecný bod P(x; y).



Využijeme rovnobežnosť vektorov – práve vtedy sú rovnobežné, ak jeden je násobkom druhého. Preto vektor $\overrightarrow{AP}$ vyjedrime, ako t-násobok smerového vektora $\vec{s_p}$:

$\overrightarrow{AP} = t.\vec{s_p}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

vypočítame súradnice vektora $\overrightarrow{AP}$ – koncový bod mínus začiatočný:

$\overrightarrow{AP} = P - A = (x; y) - (x_0; y_0) = (x - x_0; y - y_0)$

dosadíme:

$(x - x_0; y - y_0) = t.(s_1; s_2)$

$(x - x_0; y - y_0) = (t.s_1; t.s_2)$

dva vektory práve vtedy sa rovnajú, ak sa rovnajú ich jednotlivé súradnice – dostaneme sústavu:

$x - x_0 = t.s_1$

$y - y_0 = t.s_2$

už iba vyjadriť súradnice všeobecného bodu P – prenesieme na pravú stranu súradnice daného bodu A

$x = t.s_1 + x_0$

$y = t.s_2 + y_0$

Parametrická rovnica (parametrické vyjadrenie) priamky p má tvar:

$p: x = x_0 + s_1.t \qquad t \in \mathbb{R}$

$\quad y = y_0 + s_2.t$

zjednotený (vektorový tvar):

$p: P = A + t.\vec{s_p} \qquad t \in \mathbb{R}$

P. V rovnici číslo t sa volá parameter – preto dostala rovnica tento názov. Ak dosadíme konkrétne číslo, dostaneme bod priamky. Pre hodnotu t = 0 dostaneme práve ten daný bod A, ktorý sme použili v rovnici.

príklad:

Daná je priamka smerovým vektorom $\vec{s}$ a bodom. Napíšte parametrickú rovnicu priamky!

a, a: $\vec{s_a} = (-3; 5)$; A = (4; 2) — b, b: $\vec{s_b} = (1; -2)$; B = (-3; 7)

c, c: $\vec{s_c} = (0; 4)$; C = (1; 6) — d, d: $\vec{s_d} = (5; 3)$; D = (2; 0)

a: $x = 4 - 3.t \qquad t \in \mathbb{R}$

$\quad y = 2 + 5.t$

b: $x = -3 + t \qquad t \in \mathbb{R}$

$\quad y = 7 - 2t$

c: $x = 1 \qquad t \in \mathbb{R}$

$\quad y = 6 + 4t$

d: $x = 2 + 5t \qquad t \in \mathbb{R}$

$\quad y = 3t$

Daná je priamka dvoma bodmi. Napíšte jej parametrickú rovnicu!

a, a: A(-2; 7), B(3; 4) — b, b: C(5; -3), D(-1; -2)

c, c: E(10; 11), F(14; 6) — d, d: G(3; 2), H(1; -4) z bodov priamky vypočítame smerový vektor priamky

$\vec{s_a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5; -3)$

môžeme použiť hociktorý bod priamky v parametrickej rovnici → dva rôzne tvary

$a\colon x = -2 + 5t,\ y = 7 - 3t \quad t \in \mathbb{R}$ alebo $a\colon x = 3 + 5t,\ y = 4 - 3t \quad t \in \mathbb{R}$

$\vec{s_b} = \overrightarrow{CD} = D - C = (-6; 1)$

$b\colon x = 5 - 6t,\ y = -3 + t \quad t \in \mathbb{R}$ alebo $b\colon x = -1 - 6t,\ y = -2 + t \quad t \in \mathbb{R}$

$\vec{s_c} = \overrightarrow{EF} = F - E = (4; -5)$

$c\colon x = 10 + 4t,\ y = 11 - 5t \quad t \in \mathbb{R}$

$\vec{s_d} = \overrightarrow{GH} = H - G = (-2; -6) \sim (1; 3)$

súradnice sme vydelili – použime kratší vektor s opačným smerom (je rovnobežný s pôvodným)

$d\colon x = 3 + t,\ y = 2 + 3t \quad t \in \mathbb{R}$

Daná je priamka parametrickou rovnicou. Určte smerový vektor priamky a bod tej priamky!

a, $a\colon x = -2 + 4t,\ y = 1 - 3t \quad t \in \mathbb{R}$

b, $b\colon x = 5t,\ y = -4 + 6t \quad t \in \mathbb{R}$

c, $c\colon x = 3 - 2t,\ y = 7 \quad t \in \mathbb{R}$

d, $d\colon x = 5 + 3t,\ y = -1 + 5t \quad t \in \mathbb{R}$

$\vec{s_a} = (4; -3)$; $A = (-2; 1)$

$\vec{s_b}(5; 6)$; $B(0; -4)$

$\vec{s_c}(-2; 0)$; $C(3; 7)$

$\vec{s_d}(3; 5)$; $D(5; -1)$

Určte súradnice bodu parametrickou rovnicou danou priamky p, ktorému zodpovedá daný parameter t!

$p\colon x = 4 + 3t,\ y = -2 - 7t$

a, t = 0　　b, t = 1　　c, t = 4　　d, t = -2

dosadíme parameter do rovnice a vypočítame súradnice

x = 4 + 3.0 = 4

y = -2 – 7.0 = -2

A(4; -2)

x = 4 + 3.1 = 4 + 3 = 7

y = -2 – 7.1 = -2 – 7 = -9

B(7; -9)

x = 4 + 3.4 = 4 + 12 = 16

y = -2 – 7.4 = -2 – 28 = -30

C(16; -30)

x = 4 + 3.(-2) = 4 – 6 = -2

y = -2 – 7.(-2) = -2 + 14 = 12

D(-2; 12)

Daná je priamka e parametrickou rovnicou. Ktorý z bodov leží na priamke?

$e\colon x = -3 + t,\ y = 7 - 2t \quad t \in \mathbb{R}$

A(-3; 7)　　B(3; 6)　　C(0; 1)　　D(-7; 15)　　E(1; -3)

-3 = -3 + t　　/+3

$\underline{7 = 7 - 2t}$ /-7

$0 = t$

$\underline{0 = -2t}$ /:(-2)

$\left.\begin{matrix} 0 = t \\ 0 = t \end{matrix}\right\}$ dostali sme rovnaké hodnoty t ⇒ A ∈ e

$3 = -3 + t$ /+3

$\underline{6 = 7 - 2t}$ /-7

$6 = t$

$\underline{-1 = -2t}$ /:(-2)

$\left.\begin{matrix} 6 = t \\ \frac{1}{2} = t \end{matrix}\right\}$ dostali sme rôzne hodnoty t ⇒ B ∉ e

$0 = -3 + t$ /+3

$\underline{1 = 7 - 2t}$ /-7

$3 = t$

$\underline{-6 = -2t}$ /:(-2)

$\left.\begin{matrix} 3 = t \\ 3 = t \end{matrix}\right\}$ dostali sme rovnaké hodnoty t ⇒ C ∈ e

$-7 = -3 + t$ /+3

$\underline{15 = 7 - 2t}$ /-7

$-4 = t$

$\underline{8 = -2t}$ /:(-2)

$\left.\begin{matrix} -4 = t \\ -4 = t \end{matrix}\right\}$ dostali sme rovnaké hodnoty t ⇒ D ∈ e

$1 = -3 + t$ /+3

$\underline{-3 = 7 - 2t}$ /-7

$4 = t$

$\underline{-10 = -2t}$ /:(-2)

$\left.\begin{matrix} 4 = t \\ 5 = t \end{matrix}\right\}$ dostali sme rôzne hodnoty t ⇒ E ∉ e

Určte chýbajúcu súradnicu bodu tak, aby ležal na priamke!

a, A(x_A; 2), a: $x = 4 - 2t$ $\quad t \in \mathbb{R}$
$y = 3 + t$

b, B(x_B; -14), b: $x = 1 - 3t$ $\quad t \in \mathbb{R}$
$y = -4 + 5t$

c, C(-4; y_C), c: $x = 5 + 3t$ $\quad t \in \mathbb{R}$
$y = 2 + 4t$

d, D(7; y_C), d: $x = 5 + 2t$ $\quad t \in \mathbb{R}$
$y = -1 - 7t$

dosadíme danú súradnicu do rovnice → vypočítame parameter → parameter dosadíme do druhej rovnice a tak dostaneme druhú, chýbajúcu súradnicu bodu

$2 = 3 + t$ /-3

$\underline{-1 = t}$

$x = 4 - 2.(-1) = 4 + 2 = 6$

A(6; 2)

$-14 = -4 + 5t$ /+4

$-10 = 5t$ /:5

$\underline{-2 = t}$

$x = 1 - 3.(-2) = 1 + 6 = 7$

B(7; -14)

$-4 = 5 + 3t$ /-5

$-9 = 3t$ /:3

$\underline{-3 = t}$

$y = 2 + 4.(-3) = 2 - 12 = -10$

C(-4; -10)

$7 = 5 + 2t$ /-5

$2 = 2t$ /:2

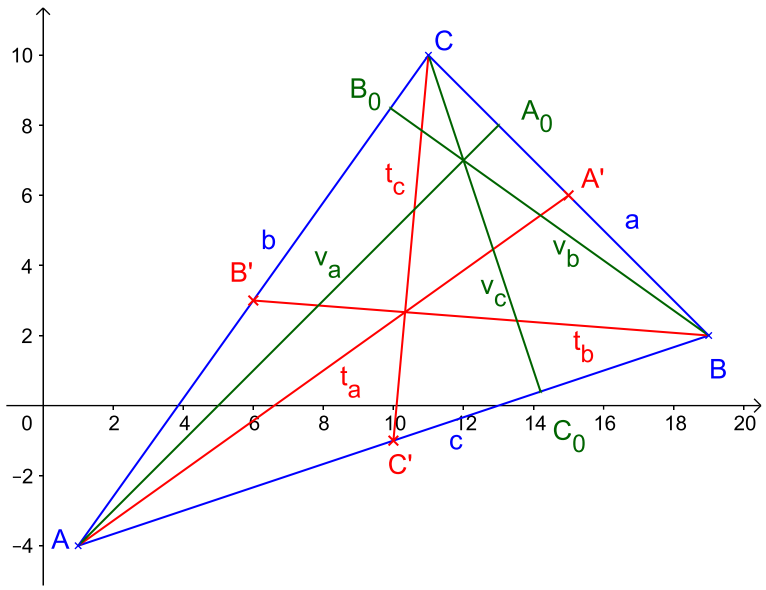
$\underline{1 = t}$

$y = -1 - 7.1 = -1 - 7 = -8$

D(7; -8)

Daný je trojuholník ABC. Napíšte parametrické rovnice strán, ťažníc a výšok!

A(1; -4), B(19; 2), C(11; 10)



a: BC

$\overrightarrow{s_a} = \overrightarrow{BC} = C - B = (-8; 8) \sim (-1; 1)$

B ∈ a

$a: x = 19 - t$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$y = 2 + t$

b: AC

$\overrightarrow{s_b} = \overrightarrow{AC} = C - A = (10; 14) \sim (5; 7)$

A ∈ b

$b: x = 1 + 5t$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$y = -4 + 7t$

c: AB

$\overrightarrow{s_c} = \overrightarrow{AB} = B - A = (18; 6) \sim (3; 1)$

A ∈ c

$c: x = 1 + 3t$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$y = -4 + t$

t_a: AA'

$A' = \frac{B+C}{2} = (15; 6)$

$\overrightarrow{s_{t_a}} = \overrightarrow{AA'} = A' - A = (14; 10) \sim (7; 5)$

A ∈ t_a

$t_a: x = 1 + 7t$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$y = -4 + 5t$

t_b: BB'

$B' = \frac{A+C}{2} = (6; 3)$

$\overrightarrow{s_{t_b}} = \overrightarrow{BB'} = B' - B = (-13; 1)$

B' ∈ t_b

$t_b: x = 6 - 13t$ $\qquad t \in \mathbb{R}$
$\quad y = 3 + t$

t_c: CC'
$C' = \frac{A+B}{2} = (10; -1)$
$\overrightarrow{s_{t_c}} = \overrightarrow{CC'} = C' - C = (-1; -11)$
C' ∈ t_c
$t_c: x = 10 - t$ $\qquad t \in \mathbb{R}$
$\quad y = -1 - 11t$

v_a: AA_0
$\overrightarrow{s_{v_a}} \perp \overrightarrow{s_a} \Rightarrow \overrightarrow{s_{v_a}} = (1; 1)$
A ∈ v_a
$v_a: x = 1 + t$ $\qquad t \in \mathbb{R}$
$\quad y = -4 + t$

v_b: BB_0
$\overrightarrow{s_{v_b}} \perp \overrightarrow{s_b} \Rightarrow \overrightarrow{s_{v_b}} = (7; -5)$
B ∈ v_b
$v_b: x = 19 + 7t$ $\qquad t \in \mathbb{R}$
$\quad y = 2 - 5t$

v_c: CC_0
$\overrightarrow{s_{v_c}} \perp \overrightarrow{s_c} \Rightarrow \overrightarrow{s_{v_c}} = (1; -3)$
C ∈ v_c
$v_c: x = 11 + t$ $\qquad t \in \mathbb{R}$
$\quad y = 10 - 3t$

Napíšte parametrickú rovnicu priamky, ktorá prechádza daným bodom a je rovnobežná s danou priamkou:

a, A(3; -2), a: $x = 7 + t$, $y = 6 - 5t$ $\qquad$ b, B(6; 5), b: $x = -2 + 7t$, $y = -3 + 4t$

- ak priamky sú rovnobežné, ich smerové vektory sú takisto rovnobežné ⇒ môžu byť aj rovnaké
- preto parametrické vyjadrenie rovnobežnej priamky môže sa líšiť iba v číslach (bez parametra t) – súradnice bodu použitého v rovnici
- môže sa líšiť aj v smerovom vektore (koeficienty pred parametrom t) – smerový vektor je násobkom druhého

$r_a: x = 3 + t$
$\quad y = -2 - 5t$

$r_b: x = 6 + 7t$
$\quad y = 5 + 4t$

Napíšte parametrickú rovnicu priamky, ktorá prechádza daným bodom a je kolmá na danú priamku:

a, C(-4; 7), c: $x = 3 + 9t$, $y = -1 + 2t$ $\qquad$ b, D(1; 2), d: $x = -2 - 5t$, $y = -3 + 4t$

- ak priamky sú kolmé, ich smerové vektory sú takisto kolmé

$\overrightarrow{s_c} = (9; 2)$
$\overrightarrow{s_{k_c}} \perp \overrightarrow{s_c} \Rightarrow \overrightarrow{s_{k_c}} = (2; -9)$
$k_c: x = -4 + 2t$
$\quad y = 7 - 9t$

$\overrightarrow{s_d} = (-5; 4)$
$\overrightarrow{s_{k_d}} \perp \overrightarrow{s_d} \Rightarrow \overrightarrow{s_{k_d}} = (4; 5)$
$k_d: x = 1 + 4t$
$\quad y = 2 + 5t$