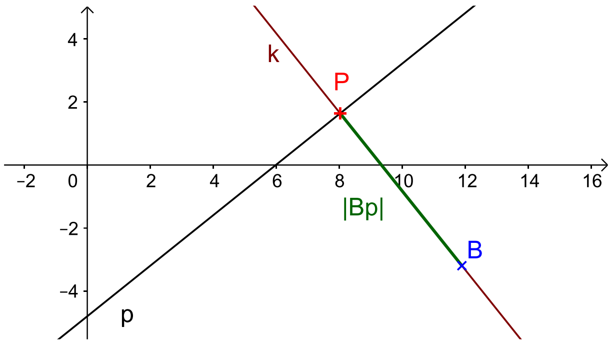
Vzdialenosť bodu od priamky

Daná je jedna priamka (p) a mimo jeden bod (B). Potrebujeme určiť ich vzdialenosť.
Klasicky (konštrukciou) by sme viedli kolmicu z vonkajšieho bodu na priamku. Vzdialenosť týchto útvarov potom bude totožná vzdialenosťou bodu a priesečníku priamok (P).



Skúsme to v analytickej geometrii. Daná je priamka rovnicou a bod súradnicami: p: $y = \frac{3}{4}x + 5$; B = (3; 7).

prvý krok je rovnica kolmej priamky

zo smernicovej rovnice priamky p vieme prečítať jej smernicu:

$k_p = \frac{3}{4}$

$k \perp p \Rightarrow k_k = -\frac{1}{k_p} = -\frac{1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$

$k: y = -\frac{4}{3}x + b$

$B \in k \Rightarrow 7 = -\frac{4}{3}.3 + b$

$7 = -4 + b$

$11 = b$

$k: y = -\frac{4}{3}x + 11$

ďalší krok je určenie priesečníku priamok

$y = \frac{3}{4}x + 5$

$y = -\frac{4}{3}x + 11$

$\frac{3}{4}x + 5 = -\frac{4}{3}x + 11 \qquad /.12$

$9x + 60 = -16x + 132 \qquad /+16x - 60$

$25x = 72 \qquad /:25$

$x = \frac{72}{25} = 2,88$

$y = \frac{3}{4}.\frac{72}{25} + 5 = \frac{54}{25} + 5 = \frac{179}{25} = 7,16$

posledný krok je určenie vzdialenosti bodov

$$|Bp| = |BP| = \sqrt{\left(\frac{72}{25} - 3\right)^2 + \left(\frac{179}{25} - 7\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{25}\right)^2 + \left(\frac{4}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{625} + \frac{16}{625}} = \sqrt{\frac{25}{625}} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Takže až v tretom kroku sme dostali hľadanú vzdialenosť. Keby sme museli takto určovať vzdialenosť bodu od priamky, bolo by to veľmi pomalý spôsob. Ale našťastie máme na to jeden vzorec, pomocou ktorého hneď môžeme dostať správny výsledok.

Nech je daná priamka všeobecnou rovnicou a k tomu bod.

p: $n_1.x + n_2.y + c = 0$; $B(x_B; y_B)$

Potom ich vzdialenosť dostaneme:

V. $|Bp| = \frac{|n_1.x_B + n_2.y_B + c|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$

P. Ak priamka je daná inou rovnicou ako všeobecnou (parametrická, smernicová, …), musíme najprv previesť na všeobecnú, lebo vzorec funguje iba všeobecnou rovnicou.

Vyskúšajme vzorec na úvodnom príklade: p: $y = \frac{3}{4}x + 5$; B = (3; 7) smernicovú rovnicu najprv upravíme na všeobecnú

$y = \frac{3}{4}x + 5 \qquad /.4$

$4y = 3x + 20 \qquad /-4y$

$0 = 3x - 4y + 20$

teraz už môžeme dosadiť

$$|Bp| = \frac{|n_1.x_B+n_2.y_B+c|}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}} = \frac{|3.3-4.7+20|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|9-28+20|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|1|}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

príklad:

Daný je trojuholník ABC. Určte dĺžky všetkých výšok trojuholníka.

A(-4; 3), B(12; -7), C(8; 9)

(Tento príklad sme riešili pri všeobecnej rovnici priamky – využijem výsledky. Keby sme nemali všeobecné rovnice strán trojuholníka, potom by sme museli skôr aj tie rovnice napísať.)

a: $4x + y - 41 = 0$

b: $x - 2y + 10 = 0$

c: $5x + 8y - 4 = 0$

$$v_a = |Aa| = \frac{|n_1.x_B+n_2.y_B+c|}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}} = \frac{|4.(-4)+3-41|}{\sqrt{4^2+1^2}} = \frac{|-16+3-41|}{\sqrt{16+1}} = \frac{|-54|}{\sqrt{17}} = \frac{54}{\sqrt{17}} = 13{,}097$$

$$v_b = |Bb| = \frac{|12-2.(-7)+10|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{|12+14+10|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|36|}{\sqrt{5}} = \frac{36}{\sqrt{5}} = 16{,}100$$

$$v_c = |Cc| = \frac{|5.8+8.9-4|}{\sqrt{5^2+8^2}} = \frac{|40+72-4|}{\sqrt{25+64}} = \frac{|108|}{\sqrt{89}} = \frac{108}{\sqrt{89}} = 11{,}448$$

Kontrolovať správnosť výsledkov tu by sme mohli pomocou obsahu trojuholníka: strana krát výška delené dva. Tak vypočítajme aj dĺžky strán.

$$a = |BC| = \sqrt{(8-12)^2 + (9-(-7))^2} = \sqrt{16+256} = \sqrt{272} = 16{,}492$$

$$b = |AC| = \sqrt{(8-(-4))^2 + (9-3)^2} = \sqrt{144+36} = \sqrt{180} = 13{,}416$$

$$c = |AB| = \sqrt{(12-(-4))^2 + (-7-3)^2} = \sqrt{256+100} = \sqrt{356} = 18{,}868$$

vypočítajme obsah

$$S = \frac{a.v_a}{2} = \frac{16{,}492.13{,}097}{2} = 107{,}998$$

$$S = \frac{b.v_b}{2} = \frac{13{,}416.16{,}100}{2} = 107{,}999$$

$$S = \frac{c.v_c}{2} = \frac{18{,}868.11{,}448}{2} = 108{,}000$$

Vypočítajte vzdialenosť rovnobežných priamok: a: $2x - 3y + 7 = 0$; b: $y = \frac{2}{3}x + 5$.

najprv zistíme, či ozaj sú priamky rovnobežné

$2x - 3.\left(\frac{2}{3}x + 5\right) + 7 = 0$

$2x - 2x - 15 + 7 = 0$

$-8 \neq 0 \Rightarrow$ sú rovnobežné

na jednej priamke si zvolíme jeden bod a určíme jeho vzdialenosť od druhej priamky

$B(3; y_B) = (3; 7)$

$y_B = \frac{2}{3}.3 + 5 = 2 + 5 = 7$

$$|ab| = |Ba| = = \frac{|n_1.x_B+n_2.y_B+c|}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}} = \frac{|2.3-3.7+7|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{|6-21+7|}{\sqrt{4+9}} = \frac{|-8|}{\sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{13}} = 2{,}219$$