A szakasz felezőpontja
(Stred úsečky)

Euklideszi szerkesztések – szerkesztések egyélű vonalzó (nem karcolatos derékszögű) és körző segítségével

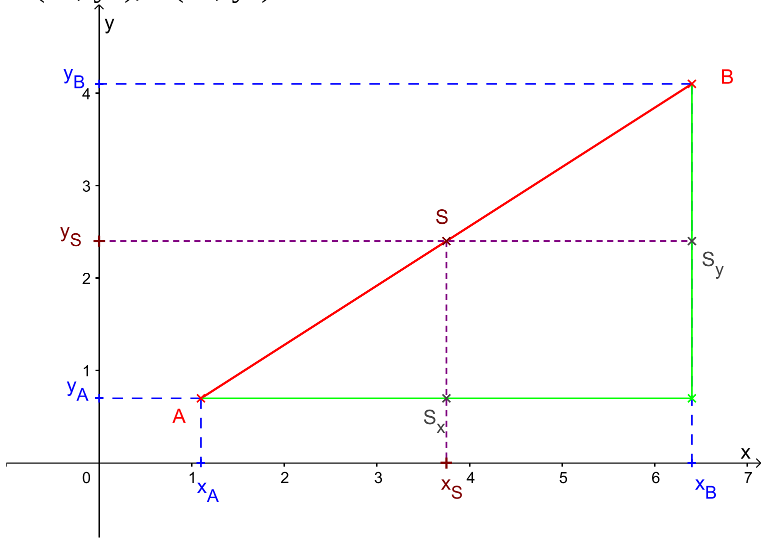
- összeköthetünk két különböző pontot egy egyenessel
- két pont távolságát körzőnyílásba vehetünk
- egy pont köré adott sugárral kört rajzolhatunk (egy másik ponthoz illeszkedő kört, vagy egy ismert távolságot – szakaszhosszat – felhasználva sugárként)
- meghatározhatjuk két egyenes metszéspontját (amennyiben létezik)
- meghatározhatjuk egy egyenes és egy kör metszéspontját/metszéspontjait (amennyiben létezik)
- meghatározhatjuk két kör metszéspontját/metszéspontjait (amennyiben létezik)

ezen lépések segítségével megszerkeszthetők az alábbi objektumok

- a szakasz felezőpontja (közepe)
- a szög tengelye
- egy adott egyenesre merőleges az egyenes egy ismert pontjában vagy egy külső pontból → ugyanez a feladat a szakasz felezőpontjában a szakasz tengelyét eredményezi
- egy adott egyenessel párhuzamos egy adott ponton keresztül
- szögmásolás

Koordinátageometriában ezen objektumokat szintén le lehet írni. Általában ezek az alakzatok egyenlete, de például kivételt képez a szakasz felezőpontja, ami csak egy pont. Próbáljuk hát meghatározni a koordinátáit, amennyiben ismertek végpontjai koordinátái.

Adottak az A és B pontok: $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$



- látható az ábrán két kisebb háromszög az SAS_x és a BSS_y
- ezek hasonlóak, mert oldalaik párhuzamosak ($\triangle SAS_x \sim \triangle BSS_y$)
- de az S pont az AB szakasz felezőpontja ⇒ így a hasonló háromszögek egy oldala egybevágó ($|AS| = |SB|$)
- ezért az SAS_x és a BSS_y háromszögek nem csak hasonlóak, hanem egybevágóak is ($\triangle SAS_x \cong \triangle BSS_y$)
- ebből kifolyólag a másik két oldaluk is egybevágó: $|AS_x| = |SS_y|$ és $|S_xS| = |S_yB|$
- ez azt jelenti, hogy a koordinátatengelyeken az x_S és az y_S koordináták pontosan a végpontok koordinátái között félúton helyezkednek el:

  az x_S az x_A és az x_B felénél

  az y_S az y_A és az y_B felénél

Ha keresünk egy számot, ami adott két szám közé esik pontosan középen, a legegyszerűbben a két szám számtani közepeként (átlaga) kaphatjuk meg:

a 7,2 és a 15,7 számok: $\bar{x}_A = \frac{7{,}2+15{,}7}{2} = \frac{22{,}9}{2} = 11{,}45$

ellenőrizzük a távolságokat (különbséget) a számok között:

11,45 – 7,2 = 4,25

15,7 – 11,45 = 4,25

Mi következik ebből? Hogy a szakasz felezőpontjának a koordinátáit megkapom, kiszámolom a szakasz végponjainak koordinátáiból a számtani közepeket. Az x koordinátákból az x koordinátáját, az y koordinátákból az y koordinátáját.

T. $x_S = \frac{x_A + x_B}{2}$

$y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$

$S = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

Ez a képlet nem csak a szakasz felezőpontjának a kiszámítására alkalmazható. Ha kicsit átalakítjuk, akkor a szakasz egyik végpontjának és felezőpontjának ismeretében a szakasz másik végpontját számolhatjuk ki vele.

$S = \frac{A+B}{2}$ /.2

$2.S = A + B$ /-A

$2.S - A = B$

Természetesen ezen összefüggés alapján külön számoljuk a végpont x koordinátáját az x koordinátákból és külön az y-t az y-okból.

$B = (2.x_S - x_A; 2.y_S - y_A)$

$A = (2.x_S - x_B; 2.y_S - y_B)$

M. Térben kibővítjük a harmadik koordinátával:

$S = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

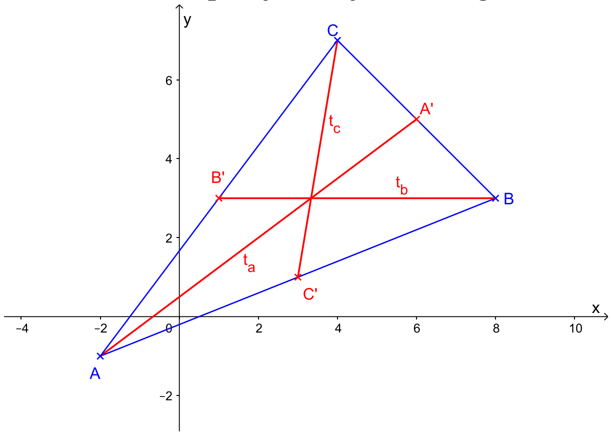
$B = (2.x_S - x_A; 2.y_S - y_A; 2.z_S - z_A)$

$A = (2.x_S - x_B; 2.y_S - y_B; 2.z_S - z_B)$

példa:

Számítsuk ki a háromszög súlyvonalainak a hosszát: A(-2; -1); B(8; 3); C(4; 7).

előbb meghatározzuk az oldal felezőpontját, majd távolságát a szemközti csúcstól



$A' = \frac{B+C}{2} = \left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right) = \left(\frac{8+4}{2}; \frac{3+7}{2}\right) = (6; 5)$

$t_a = |AA'| = \sqrt{(x_{A'} - x_A)^2 + (y_{A'} - y_A)^2} = \sqrt{(6-(-2))^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36}$

$t_a = 10$

$B' = \frac{A+C}{2} = \left(\frac{-2+4}{2}; \frac{-1+7}{2}\right) = (1; 3)$

$t_b = |BB'| = \sqrt{(1-8)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(-7)^2 + 0^2} = \sqrt{49 + 0}$

$t_b = 7$

$C' = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{-2+8}{2}; \frac{-1+3}{2}\right) = (3; 1)$

$t_c = |CC'| = \sqrt{(3-4)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}$

$t_c = 6{,}083$

A KL szakasz egyik végpontja K(13; -3) és felezőpontja S(-5; 7). Határozzuk meg a másik végpontját.

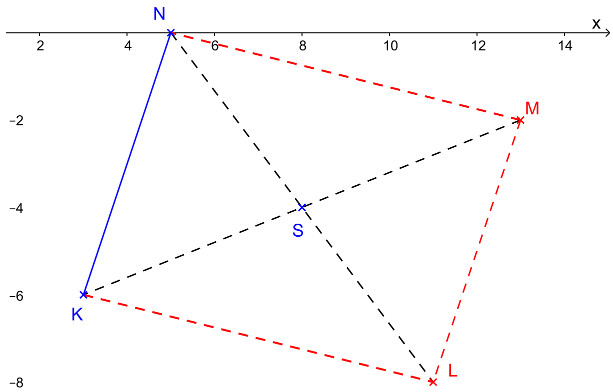
$S = \frac{K+L}{2} \rightarrow L = 2.S - K$

$L = (2.(-5) - 13; 2.7 - (-3)) = (-10 - 13; 14 + 3)$

L = (-23; 17)

A KLMN paralelogrammában ismertek K(3; -6), N(5; 0) csúcsai, és átlóinak S(8; -4) metszéspontja. Határozzuk meg a hiányzó L, M csúcsait és átlói hosszát.

kihasználjuk, hogy a paralelogramma középpontja felezi az átlókat



$S = \frac{L+N}{2} \rightarrow L = 2.S - N$

L = (2.8 – 5; 2.(-4) – 0) = (16 – 5; -8 – 0)

L = (11; -8)

$S = \frac{K+M}{2} \rightarrow M = 2.S - K$

M = (2.8 – 3; 2.(-4) – (-6)) = (16 – 3; -8 + 6)

M = (13; -2)

$e = |KM| = \sqrt{(x_M - x_K)^2 + (y_M - y_K)^2} = \sqrt{(13-3)^2 + \left(-2-(-6)\right)^2} = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{100+16}$

e = 10,770

$f = |LN| = \sqrt{(5-11)^2 + \left(0-(-8)\right)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{36+64}$

f = 10