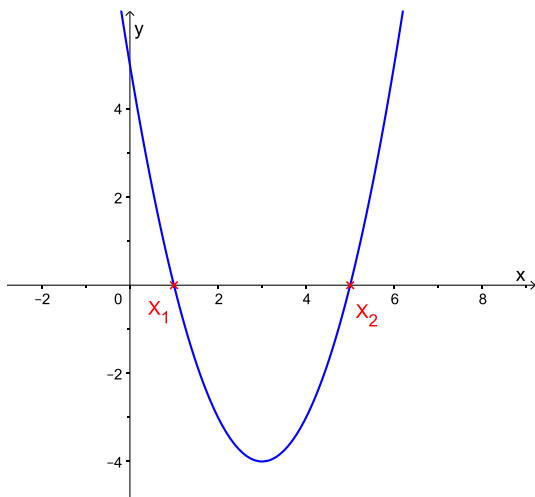


Másodfokú egyenletek (Kvadratické rovnice)

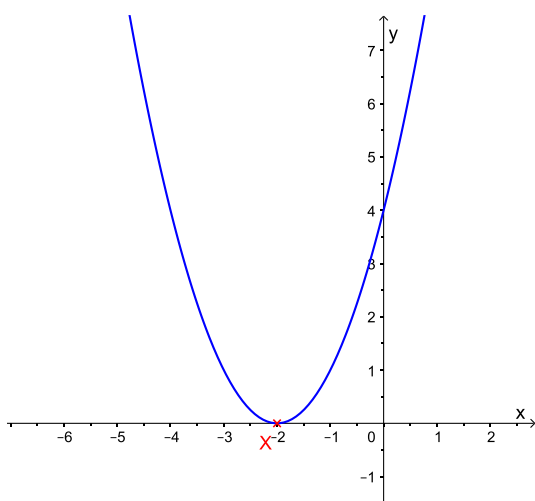
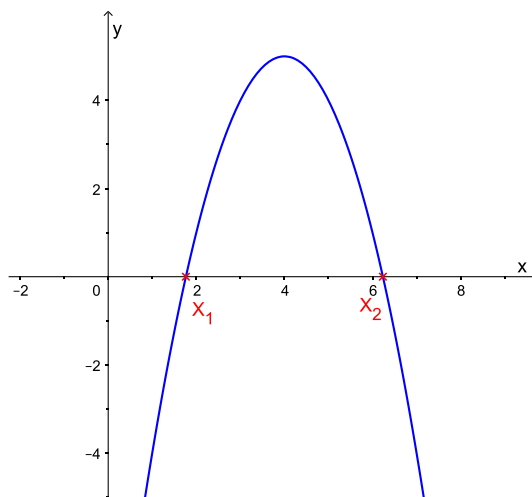
D. Egy **egyenlet másodfokú**, ha olyan alakra hozható (törtek eltüntetésével, zárójelek felbontásával, tagok rendezésével és összevonásával), hogy az egyenlet egyik oldalán másodfokú függvény szerepeljen a másikon pedig nulla.

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad \text{vagy} \quad 0 = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad a; b; c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

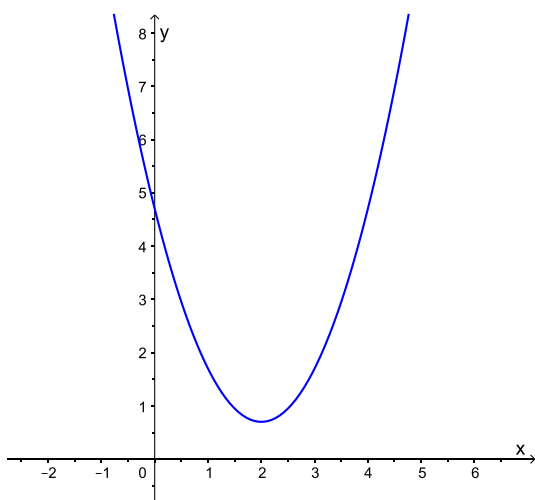
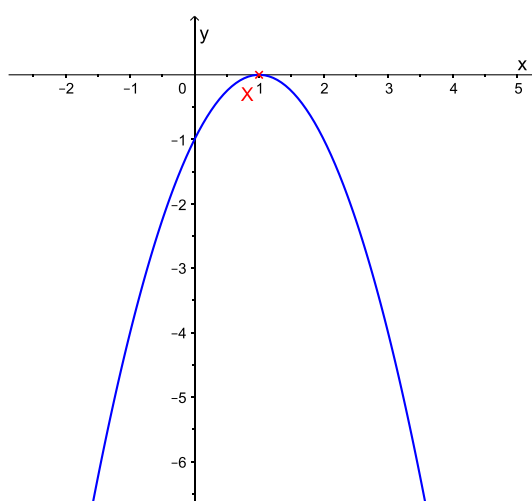
A másodfokú egyenlet megoldása tulajdonképpen a másodfokú függvény grafikonjának (parabola) és az x tengely közös pontjainak keresése. A parabola különböző helyzetet vehet fel:



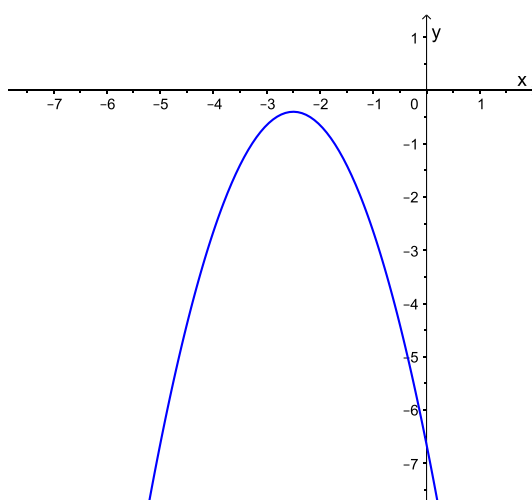
a parabola kétszer áthalad az x tengelyen
az x tengely a parabola szelője (2 közös pont)



a parabola érinti az x tengelyt
az x tengely a parabola érintője (1 közös pont)



a parabola az x tengely felett van



a parabola az x tengely alatt van

a parabolának nincs közös pontja az x tengellyel

Hiányos másodfokú egyenletek

1. hiányzik a lineáris tag ($b = 0$)

$$a \cdot x^2 + c = 0$$

$$a \cdot x^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad (\text{az } x_1 \text{ és az } x_2 \text{ ellentett értékek})$$

a megoldhatóság feltétele, hogy a gyökjel alatti kifejezés értéke pozitív legyen:

$$-\frac{c}{a} > 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$\frac{c}{a} < 0 \rightarrow \text{ez azt jelenti, hogy az } a \text{ és a } c \text{ ellentett előjelűek kell, hogy legyenek}$$

2. hiányzik a konstans tag ($c = 0$)

$$a \cdot x^2 + b \cdot x = 0$$

$$x(a \cdot x + b) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$a \cdot x + b = 0$$

$$a \cdot x = -b$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

ebben az esetben az egyik megoldás mindig a nulla

3. hiányzik a lineáris és a konstans tag is ($b = c = 0$)

$$a \cdot x^2 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

az ilyen egyenletnek egyetlen kétszeres gyök a megoldása: a nulla

példa:

Oldjuk meg az alábbi hiányos másodfokú egyenleteket:

$$a, x^2 + 3x = 0$$

$$d, 7 - x^2 = 0$$

$$b, 5x^2 - 125 = 0$$

$$e, 4x = 3x^2$$

$$c, x^2 + 3 = 0$$

$$f, (x + 6)^2 = 81$$

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x(x + 3) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x_2 = -3$$

$$5x^2 - 125 = 0$$

$$5x^2 = 125$$

$$x^2 = 25$$

$$|x| = 5$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -5$$

$$x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 = -3$$

nincs megoldása

$$7 - x^2 = 0$$

$$7 = x^2$$

$$\sqrt{7} = |x|$$

$$x_1 = \sqrt{7}$$

$$x_2 = -\sqrt{7}$$

$$4x = 3x^2$$

$$4x - 3x^2 = 0$$

$$x(4 - 3x) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$4 - 3x = 0$$

$$4 = 3x$$

$$\frac{4}{3} = x_2$$

$$(x + 6)^2 = 81$$

$$|x + 6| = 9$$

$$x + 6 = 9$$

$$x_1 = 3$$

$$x + 6 = -9$$

$$x_2 = -15$$

Teljes másodfokú egyenlet

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

$/-c$

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a} x \right) = -c$$

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) = -c + a \cdot \left(\frac{b}{2a} \right)^2$$

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = -c + \frac{b^2}{4a}$$

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a}$$

$/:a$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$/\sqrt{\quad}$

$$\left| x + \frac{b}{2a} \right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\left| x + \frac{b}{2a} \right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$\left| x + \frac{b}{2a} \right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

az egyesített képlet a másodfokú egyenlet gyökeinek kiszámítására:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

M. Az a , b és c értékei függetlenek a sorrendtől – különben a $3x^2 - 5x - 2 = 0$ és a $-5x - 2 + 3x^2 = 0$ egyenleteknek más megoldásai lennének, annak ellenére, hogy a két egyenlet azonos, csak a tagok sorrendjében különböznek:

az a szám a másodfokú tag együtthatója (a szám ami az ismeretlen négyzetét szorozza előjelestül)

a b szám a lineáris tag együtthatója (a szám ami az ismeretlent szorozza előjelestül)

a c szám a konstans tag/tagok (az ismeretlen mentes szám/számok $\rightarrow$ néha az irracionális szám mellett van egész/racionális szám is – pl.: $c = -3 + \sqrt{5}$)

M. Természetesen ezen típusú egyenleteknél is a teljes megoldás mindig tartalmazza az ellenőrzést (próbát) is.

A képlet négyzetgyököt tartalmaz, amit nem lehet negatív számokból vonni (legalábbis a valós számok halmazán nem). Így a gyökjel alatti kifejezés előjele meghatározó tényező a másodfokú egyenletek megoldhatóságánál. Ebből kifolyólag ez a kifejezés (gyökalap) külön nevet kapott: diszkrimináns – „előre megítélés”, „döntő tényező”.

a másodfokú egyenlet diszkriminánsa: $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

meghatározza a megoldások számát

a, $D > 0 \Rightarrow$ az egyenletnek két gyöke van

b, $D = 0 \Rightarrow$ az egyenletnek egy, kétszeres gyöke van

c, $D < 0 \Rightarrow$ az egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán

gyöktényezős alak/lineáris tényezőkre bontás (rozloženie na koreňových/lineárnych činiteľov):

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

$$\text{Viète-formulák: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}; \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$$

$$\text{ha } a = 1 \quad x_1 + x_2 = -b; \quad x_1 \cdot x_2 = c$$

A Viète-formulák segítenek az egész gyökökkel rendelkező másodfokú egyenletek megoldásában – nem szükséges megoldóképletet alkalmazni.

Próbáljuk meg felbontani a másodfokú háromtagot gyöktényezők szorzatára:

- a zárójelben szereplő számok összege megegyezik a lineáris tag együtthatójával
- szorzatuk pedig a konstans tagot adja

Mivel az adott összeg (mint két szám összege) végtelen sok módon állítható elő, szorzat viszont csak néhány létezik, így ezen szorzatokat jegyezzük le. Utána keressük a helyes tényezőpárt, ahol az összeg a megfelelő lesz. Ezt általában fejben végezzük el, és már csak a megfelelő számpárt írjuk be a zárójelekbe.

példa:

Oldjuk meg a másodfokú egyenletet gyöktényezők szorzatára bontással: $x^2 - 5x - 24 = 0$

az összeg -5

a szorzat -24 – felsoroljuk a lehetőségeket

-1.24	1.(-24)
-2.12	2.(-12)
-3.8	3.(-8)
-4.6	4.(-6)

a megfelelő összeget a 3 és -8 számpár adja

vagyis gyöktényezős alakban egyenletünk így néz ki:

$$(x + 3)(x - 8) = 0$$

ez azt jelenti, hogy:

$$x + 3 = 0 \quad \vee \quad x - 8 = 0$$

$$x_1 = -3; \quad x_2 = 8$$

Oldjuk meg a másodfokú egyenletet gyöktényezők szorzatára bontással: $x^2 + 7x - 78 = 0$

az összeg 7

a szorzat -78 – felsoroljuk a lehetőségeket

-1.78	1.(-78)
-2.39	2.(-39)
-3.26	3.(-26)
-6.13	6.(-13)

a megfelelő összeget a -6 és 13 számpár adja

$$(x - 6)(x + 13) = 0$$

ez azt jelenti, hogy:

$$x - 6 = 0 \quad \vee \quad x + 13 = 0$$

$$x_1 = 6; \quad x_2 = -13$$

De általában nincs ekkora szerencsénk, és az egyenlet gyökei racionális vagy irracionális számok. Ekkor nincs választásunk, a megoldóképletet kell alkalmaznunk és így kiszámolni a megoldásokat.

Oldjuk meg a másodfokú egyenletet: $2x^2 - 3x - 2 = 0$

$$a = 2; \quad b = -3; \quad c = -2$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

Oldjuk meg a másodfokú egyenletet: $3x^2 = 2 - 5x$

egyenletünket előbb nullára redukáljuk – az egyenlet egyik oldalán nullának kell maradnia, csak ezután használhatjuk a képletet → tehát előbb átalakítjuk

$$3x^2 = 2 - 5x \quad \quad \quad / -2 + 5x$$

$$3x^2 - 2 + 5x = 0$$

$$a = 3; \quad b = 5; \quad c = -2$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \nearrow \frac{1}{3} \searrow -2$$

Oldjuk meg a másodfokú egyenletet: $\frac{x-4}{x+3} + \frac{x+3}{x-4} = 2,5$

előbb feltételeket kell szabni – bebiztosítani, hogy a nevezőbe ne kerülhessen nulla

$$x + 3 \neq 0 \rightarrow x \neq -3$$

$$x - 4 \neq 0 \rightarrow x \neq 4$$

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{x+3} + \frac{x+3}{x-4} &= 2,5 & / \cdot (x+3)(x-4) \\ (x-4)^2 + (x+3)^2 &= 2,5(x+3)(x-4) \\ x^2 - 8x + 16 + x^2 + 6x + 9 &= 2,5(x^2 - 4x + 3x - 12) \\ 2x^2 - 2x + 25 &= 2,5x^2 - 2,5x - 30 & / -2x^2 + 2x - 25 \\ 0 &= 0,5x^2 - 0,5x - 55 & / \cdot 2 \\ 0 &= x^2 - x - 110 \end{aligned}$$

$$a = 1; b = -1; c = -110$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-110)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 440}}{2} = \frac{1 \pm 21}{2} = \nearrow 11 \searrow -10$$

Oldjuk meg a másodfokú egyenletet: $\frac{6-x}{3x^2-12} - \frac{1}{x-2} = 1 - \frac{1}{2-x}$

$$3x^2 - 12 \neq 0$$

$$3(x^2 - 4) \neq 0$$

$$3(x+2)(x-2) \neq 0$$

$$x + 2 \neq 0 \rightarrow x \neq -2$$

$$x - 2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$$

$$\begin{aligned} \frac{6-x}{3x^2-12} - \frac{1}{x-2} &= 1 - \frac{1}{2-x} \\ \frac{6-x}{3x^2-12} - \frac{1}{x-2} &= 1 - \frac{1}{-1(-2+x)} & / \cdot 3(x+2)(x-2) \\ 6 - x - 1,3(x+2) &= 3(x^2 - 4) + 1,3(x+2) \\ 6 - x - 3x - 6 &= 3x^2 - 12 + 3x + 6 \\ -4x &= 3x^2 + 3x - 6 & / +4x \\ 0 &= 3x^2 + 7x - 6 \end{aligned}$$

$$a = 3; b = 7; c = -6$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{6} = \frac{-7 \pm 11}{6} = \nearrow \frac{2}{3} \searrow -3$$