

Inverzná funkcia

D. Nech je daná funkcia $f = \{(x; y) | x \in X \wedge y \in Y\}$. Potom **inverznou funkciou** f^{-1} je funkcia $f^{-1} = \{(y; x) | y \in Y \wedge x \in X\}$, ak je funkciou.

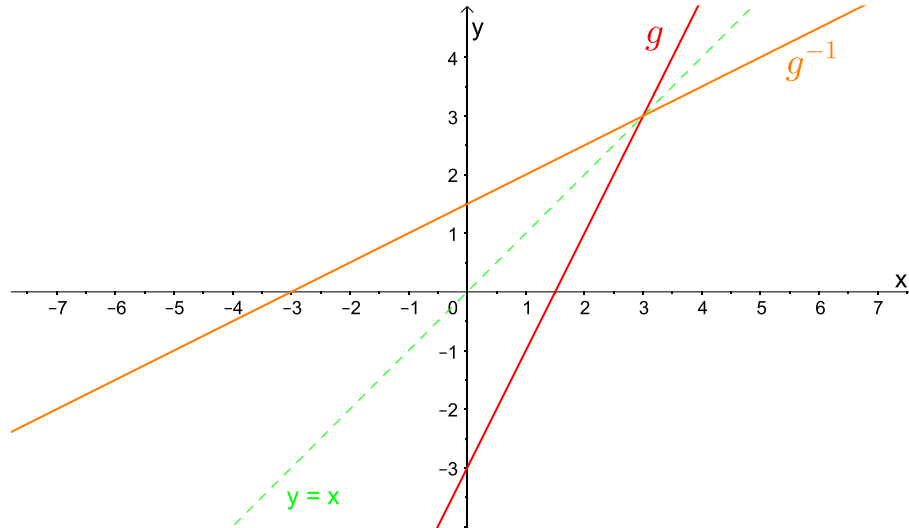
V. Iba k tým funkciám existuje inverzná funkcia, ktorá je prostá (funkčné hodnoty sa neopakujú).

Z definície vyplýva, že definičný obor funkcie bude oborom hodnôt inverznej funkcie a naopak.

$$D_f = H_{f^{-1}} \wedge H_f = D_{f^{-1}}$$

pr. $g: y = 2x - 3$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	y
$2x - 3$	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	g^{-1}



Ako zistiť o ktorú funkciu ide?

vyjadriť z predpisu funkcie x

$$y = 2x - 3 \quad /+3$$

$$y + 3 = 2x \quad /:2$$

$$\frac{1}{2}y + \frac{3}{2} = x$$

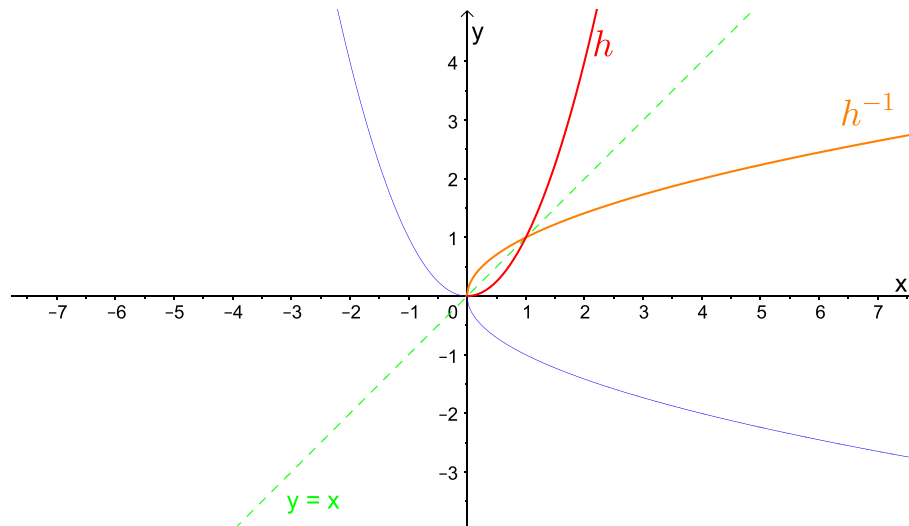
vymeniť x na y a naopak

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = y$$

$$g^{-1}: y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

pr. $h: y = x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	y
x^2	9	4	1	0	1	4	9	h^{-1}



v tomto prípade v „inverznej“ funkcii k x-ovým hodnotám patria dve rôzne y-ové hodnoty (okrem 0) – čiže nevznikla funkcia $\Leftarrow$ kvadratická funkcia nie je prostá

ALE, ak definičný obor funkcie zúžime na interval $\mathbb{R}_0^+ = \langle 0; \infty \rangle$, potom na tom intervale už bude prostá a invertovateľná

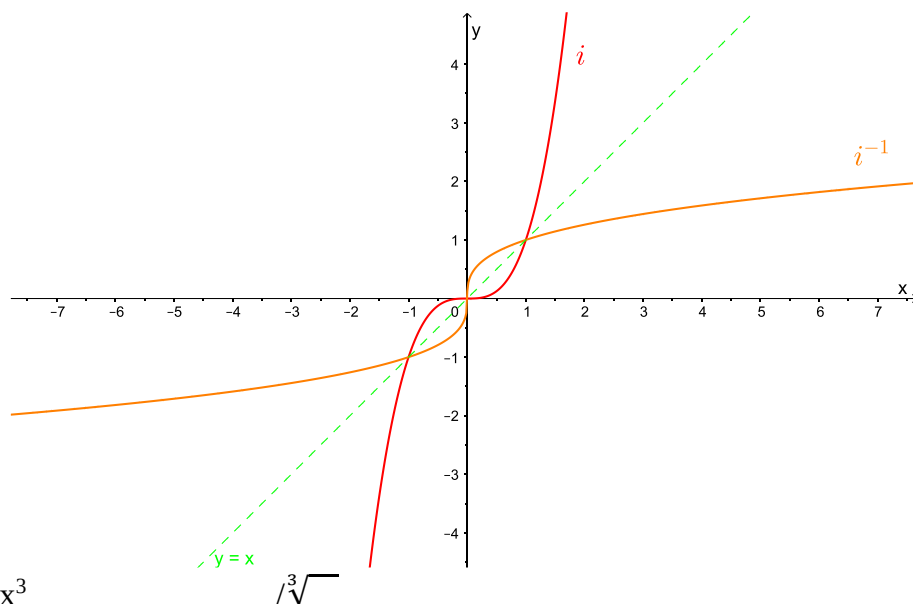
$$y = x^2 \quad \sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{y} = x$$

$$h^{-1}: y = \sqrt{x}$$

pr. $i: y = x^3$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	y
x^3	-27	-8	-1	0	1	8	27	i^{-1}



$$y = x^3 \quad \sqrt[3]{\quad}$$

$$\sqrt[3]{y} = x$$

$$i^{-1}: y = \sqrt[3]{x}$$

P. Keby sme zúžili definičný obor kvadratickej funkcie na záporné čísla, potom by ostala ľavá polovica pôvodnej paraboly – kde funkcia je klesajúca. Aj inverzná funkcia k nej je takisto klesajúca – modrá polovica ležatej paraboly.

V. Funkcia a k nej inverzná funkcia podľa monotónnosti sú rovnaké. Invertovanie zachováva monotónnosť.

V. Graf funkcie a inverznej k nej sú symetrické podľa priamky s rovnicou $y = x$ (zelená čiarkovaná).