

Exponenciális egyenletek (Exponenciálne rovnice)

D. Egy egyenlet *exponenciális*, ha ismeretlent tartalmaz a kitevőjében.

Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű $\rightarrow$ minden függvényértéket (y értéket) csak egyszer vesz fel (vagy monoton növekvő, vagy monoton csökkenő az egész értelmezési tartományon). Pontosan ezt használjuk fel az exponenciális egyenletek megoldásánál.

T. $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

Ha olyan alakra hozzuk egyenletünket, hogy két azonos alapú hatvány egyenlő, akkor elegendő a kitevők egyenlőségét megoldanunk – vagyis a keletkező egyenlet egyszerűbb, általában már nem exponenciális.

M. Természetesen ezen típusú egyenlet teljes megoldásához is hozzátartozik az ellenőrzés.

Ismétlés

T. (a hatványok tulajdonságai – 1. évfolyam)

a, $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

b, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

c, $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

d, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

e, $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

példa:

Oldjuk meg az egyenletet: $2^{5x-3} = 16$.

hozzuk az egyenlet mindkét oldalán azonos alapra a hatványokat

$$2^{5x-3} = 2^4$$

ezek után elegendő a kitevők egyenlőségét írunk

$$5x - 3 = 4 \quad /+3$$

$$5x = 7 \quad /:5$$

$$x = \frac{7}{5}$$

Oldjuk meg az egyenletet: $2^{x+1} \cdot 4^{2x-3} = 8^{-5}$.

mindegyik hatványalap a 2 hatványa

$$2^{x+1} \cdot (2^2)^{2x-3} = (2^3)^{-5}$$

eltüntetjük a zárójelet (hatvány hatványa) és a bal oldalon összeszorozzuk az azonos alapú hatványokat

$$2^{x+1} \cdot 2^{4x-6} = 2^{-15}$$

$$2^{5x-5} = 2^{-15}$$

azonos alapú hatványok egyenlőségét kaptuk $\Rightarrow$ ez a kitevők egyenlőségét jelenti

$$5x - 5 = -15 \quad /+5$$

$$5x = -10 \quad /:5$$

$$x = -2$$

Oldjuk meg az egyenletet: $14^{x-1} = 19$.

a 19 nem fejezhető ki 14 egész hatványaként $\rightarrow$ ebben az esetben az egyenlet logaritmálása segíthet a számológépeken tízes alapú és természetes logaritmus található (bár az újabbakon már tetszőleges alapú logaritmus is található), ezért a kettőből választunk

$$\log 14^{x-1} = \log 19$$

most pedig a logaritmus azonosságait használjuk az egyenlet alakításához

$$(x-1) \cdot \log 14 = \log 19 \quad /:\log 14$$

$$x-1 = \frac{\log 19}{\log 14} \quad /+1$$

$$x = \frac{\log 19}{\log 14} + 1$$

ezt már számológéppel kell kiszámítanunk

$$x = 2,1157$$

a logaritmus értékeket négy tizedesjegyre kerekítjük

Oldjuk meg az egyenleteket a racionális számok halmazán:

$$a, 3^x = 27$$

$$b, 2^x = 8$$

$$c, 3^{2x} = 27$$

$$d, 2^{3x} = 8$$

$$e, 3^{5x-3} = 81$$

$$f, 2^{5x-3} = 16$$

$$g, 3^{4x-5} = 729$$

$$h, 2^{4x-5} = 64$$

Oldjuk meg az egyenleteket a egész számok halmazán:

$$a, 2^{x-2} = 5^{2-x}$$

$$b, 3^{3x} = 27^{27}$$

$$c, 8^{5-x} = 7^{x-5}$$

$$d, 5^{x^2} = 5^{3x}$$

$$e, 3^{x-4} = 2^{x-4}$$

$$f, \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$$

$$g, 4^{2x-3} = 7^{x-1,5}$$

$$h, 7^{x-3} = 4^{2x-6}$$

Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán:

$$a, 2^{x+3} - 2^x = 112$$

$$b, 10^x + 10^{x-1} = 0,11$$

$$c, 2^{x+2} + 2^{x-2} = 34$$

$$d, 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 896$$

Oldjuk meg az egyenletet:

$$a, 5^2 \cdot 7^{x-1} = 8575;$$

$$b, 3^{2x-1} = 2^{1-2x} \cdot 36;$$

$$c, 8 \cdot 2^{2-x} = 16^{-3};$$

$$d, 9^{x-1} \cdot 3^{2x-1} = 27;$$

$$e, \frac{3^x}{2^x} = \frac{4}{9};$$

$$f, 2^x = 3^{x-1};$$

Oldjuk meg az egyenletet:

$$a, 3^{1+x} - 3^{2+x} + 3^{3+x} = 0,1;$$

$$b, 3^x \cdot 0,25^{-x} = 12^{x+1} - 110!$$

Oldjuk meg az egyenletet:

$$a, 12^x = 5,423;$$

$$b, 36,5^x = 259;$$

$$c, 3^{4x-1} = 5^{3x+5}!$$